

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

2. ispit – 3. srpnja 2026.

Zadatak 1 Neka je $\overline{AB}$ tetiva na kružnici $\mathcal{C}$, točke P i Q odabrane su redom na tangentama t_A i t_B na kružnicu $\mathcal{C}$ u točkama A i B tako da su P i Q u različitim poluravninama na koje pravac AB dijeli ravninu, te takve da vrijedi $|AP| = |BQ|$. Ako sa R označimo presjek pravca PQ i tetive $\overline{AB}$ dokažite da je R polovište segmenta $\overline{PQ}$.

Rješenje. Neka je K presjek tangente t_A i paralele sa tetivom AB koja prolazi kroz točku Q . Kako je oštri kut između tetive $\overline{AB}$ i tangente t_A jednak oštrom kutu između tetive $\overline{AB}$ i tangente t_B to je četverokut $ABQK$ jednakokračni trapez, to jest $|AK| = |BQ| = |AP|$.

Dakle A je polovište stranice $\overline{PK}$, kako je dodatno pravac AB paralelan s KQ to je dužina $\overline{AR}$ srednjica u trokutu $\triangle PKQ$. Zaključujemo da je K polovište dužine $\overline{PQ}$.

□

Zadatak 2 Neka je $ABCDEF$ šesterokut takav da vrijedi $AD \parallel BC$ i $|AD| : |BC| = 5$. Neka su točke K, L, M redom polovišta stranica $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}$. Ako su P i Q redom polovišta dužina $\overline{KM}$ i $\overline{LM}$, dokažite da vrijedi $PQ \parallel AD$ i odredite omjer $|AD| : |PQ|$.

Rješenje. Neka je $|BC| = x$ i $|AD| = 5x$. Četverokut $ABCD$ je trapez, a KL srednjica tog trapeza, pa je paralelna s AD i BC , te je $|KL| = 3x$. Dužina PQ je srednjica trokuta KLM , pa je paralelna s KL i vrijedi $|PQ| = \frac{1}{2}|KL| = \frac{3x}{2}$. Konačno, slijedi da je omjer $|AD| : |PQ| = 10 : 3$.

Zadatak 3 Neka je p fiksni pravac dan s jednadžbom $x = -1$ i $P = (1, 0)$ fiksna točka u ravnini. Za varijabilni X na pravcu p odredite geometrijsko mjesto presjeka okomice u X na p i simetrale dužine $\overline{XP}$.

Rješenje. Za varijabilni X neka je S_X sjecište simetrale dužine $\overline{XP}$ i okomice u X na p .

Kako je S_X na simetrali dužine $\overline{XP}$ imamo da je

$$|PS_X| = |XS_X|,$$

a kako je S_X na okomici u X na p to je $XS_X \perp p$. Imamo jednakost

$$d(P, S_X) = d(S_X, p),$$

što po geometrijskoj definiciji parabole implicira da S_X leži na paraboli s fokusom $P = (1, 0)$ i direktrisom $p \dots x = -1$. Iz formule za koordinate fokusa parabole imamo $p/2 = 1$ to jest $p = 2$. Stoga nam je parabola dana sa jednadžbom

$$y^2 = 4x.$$

□

Zadatak 4 Zadani su vrhovi trokuta $A(1, 0, 2)$, $B(2, -1, 3)$ i $C(1, 2, 0)$.

- Odredite jednadžbu ravnine π koja prolazi točkama A, B i C .
- Izračunajte površinu trokuta $\triangle ABC$.
- Odredite udaljenost ishodišta koordinatnog sustava od ravnine π .

Zadatak 5

- a) Neka su $\mathcal{E}$ i $\mathcal{H}$ redom elipsa i hiperbola sa zajedničkim fokusima. Dokažite da su $\mathcal{E}$ i $\mathcal{H}$ međusobno okomite*.
- b) Neka su a, b, c i d pozitivni realni brojevi takvi da je $a > b$ i $c > d$. Ukoliko su elipsa $\mathcal{E}$ i hiperbola $\mathcal{H}$ dane s jednadžbama

$$\mathcal{E} \dots \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \mathcal{H} \dots \frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2} = 1,$$

međusobno okomite, dokažite da su im linearni ekscentriciteti jednaki, to jest da vrijedi jednakost

$$a^2 - b^2 = c^2 + d^2.$$

**Napomena:* Dvije su krivulje okomite u točki sjecišta ako su njihove tangente u toj točki međusobno okomite.

Rješenje.

- a) Označimo zajedničke fokuse elipse $\mathcal{E}$ i hiperbole $\mathcal{H}$ sa F i G . Neka je P točka na presjeku elipse i hiperbole.

Po optičkom svojstvu elipse imamo da je tangenta $t_{\mathcal{E}}$ na elipsu u točki P zapravo vanjska simetrala kuta $\angle FPG$.

Po optičkom svojstvu hiperbole imamo da je tangenta $t_{\mathcal{H}}$ na hiperbolu u točki P zapravo unutarnja simetrala kuta $\angle FPG$.

Kako su unutarnja i vanjska simetrala svakog kuta međusobno okomite to je $t_{\mathcal{E}} \perp t_{\mathcal{H}}$, to jest hiperbola i elipsa su međusobno okomite u točki P .

□

- b) Neka su $t_{\mathcal{E}}$ i $t_{\mathcal{H}}$, redom tangente na elipsu i hiperbolu u nekoj njihovoj točki presjeka $P = (x_0, y_0)$. Jednadžbe tangentu su tada dane sa

$$t_{\mathcal{E}} \dots \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1, \quad t_{\mathcal{H}} \dots \frac{x_0 x}{c^2} - \frac{y_0 y}{d^2} = 1,$$

iz kojih možemo iščitati odgovarajuće normale $n_{\mathcal{E}} = \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right)$ i $n_{\mathcal{H}} = \left(\frac{x_0}{c^2}, -\frac{y_0}{d^2}\right)$. Po uvjetu podzadatka b) imamo da je $t_{\mathcal{E}} \perp t_{\mathcal{H}} \iff n_{\mathcal{E}} \cdot n_{\mathcal{H}} = 0$, odakle slijedi

$$\frac{x_0^2}{a^2 c^2} = \frac{y_0^2}{b^2 d^2} \quad (1)$$

Nadalje, kako je $P \in \mathcal{E} \cap \mathcal{H}$ to koordinate točke P zadovoljavaju i jednadžbu elipse i jednadžbu hiperbole,

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x_0^2}{c^2} - \frac{y_0^2}{d^2} = 1,$$

oduzimanjem gornjih jednakosti dobivamo

$$x_0^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} \right) + y_0^2 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{d^2} \right) = 0 \implies \frac{x_0^2}{a^2 c^2} (a^2 - c^2) = \frac{y_0^2}{b^2 d^2} (b^2 + d^2).$$

Koristeći jednakost (1) dobivamo

$$\cancel{\frac{x_0^2}{a^2 c^2}} (a^2 - c^2) = \cancel{\frac{y_0^2}{b^2 d^2}} (b^2 + d^2) \implies a^2 - b^2 = c^2 + d^2,$$

to jest dokazali smo da su linearni ekscentriciteti elipse i hiperbole jednaki $e_{\mathcal{E}} = e_{\mathcal{H}}$.

□